LA CONDICIÓN DEL CONSECUENTE DE LA LÓGICA DE SECUENTES DE GENTZEN Y LA IDENTIFICACIÓN DE LOS TEOREMAS INTUICIONISTAS

Cecilia Durán

UNLP

Introducción

En 1934 Gerhard Gentzen publicó, *Recherches sur la Déduction Logique*. En ese trabajo presenta su Cálculo de Deducción Natural y su Cálculo de Secuentes para la Lógica Intuicionista y para la Lógica Clásica. Dichos cálculos constituyen una presentación no axiomática de esos sistemas lógicos. El enfoque de Gentzen se centra en el concepto de prueba. Una vez identificado un conjunto de reglas en particular, un sistema lógico puede definirse a partir de las mismas ya que los teoremas de ese sistema serán los que se deriven a partir del conjunto vacío de premisas.

El Cálculo de Secuentes es más abstracto que el Cálculo de Deducción Natural en el sentido de que puede considerarse como un sistema ``metadescriptivo'' respecto de cómo se organizan las deducciones naturales. En el Cálculo de Deducción Natural las reglas definen relaciones entre fórmulas, mientras que en el Cálculo de Secuentes las reglas representan afirmaciones acerca del concepto de consecuencia lógica. En lo que sigue nos centraremos en el Cálculo de Secuentes, y en particular en la diferencia que Gentzen establece entre la Lógica Proposicional Intuicionista y Clásica.

Respecto del Cálculo de Secuentes, Gentzen distingue dos tipos de reglas: las estructurales y las operatorias. Las reglas estructurales expresan relaciones de dependencia entre premisas y conclusión, que no se establecen en función de las conectivas que aparezcan en las fórmulas sino de la estructura de las secuencias que las componen. Por ejemplo, la Regla de Atenuación en el antecedente expresa la propiedad de Monotonicidad de la noción de consecuencia lógica. Las reglas operatorias expresan relaciones de dependencia entre secuencias de fórmulas que tienen como signo principal a una conectiva lógica y son equivalentes a las reglas del Cálculo de Deducción Natural.

Todas las derivaciones de teoremas deben comenzar por secuencias fundamentales, es decir secuencias de la forma A ñ A, la cual expresa que hay una prueba hipotética de A a partir de A.

Las expresiones que forman parte de una derivación en el Cálculo de Secuentes no son todas ellas fórmulas sino también “suites” o conjuntos de fórmulas no ordenadas. Este tipo de derivaciones se establece entre secuentes, es decir expresiones de la forma:

$U_1, ..., U_m$ ñ $B_1, ..., B_n$

Afirmar un secuente equivale a afirmar que hay una prueba hipotética del consecuente (o postsecuente) a partir del antecedente (o prosecuente), en donde tanto el antecedente como el consecuente son conjuntos de fórmulas.

Una de las particularidades interesantes del Cálculo de Secuentes es que puede establecerse una diferencia entre Lógica Intuicionista y Lógica Clásica que no remite a la aceptación o rechazo de una regla operatoria más, como en el Cálculo de Deducción Natural, sino a una restricción sintáctica que se impone sobre los secuentes de una derivación intuicionista, la denominada Condición del Consecuente (o postsecuente).

Condición del consecuente (CC): el consecuente de una secuencia que forma parte de una derivación intuicionista no puede tener más de una fórmula.

Dado que esta restricción no se aplica a las derivaciones de la lógica clásica, el consecuente de cualquier secuencia que forme parte de una derivación clásica puede tener más de una fórmula.

Esta restricción altera ciertamente las reglas estructurales ya que Contracción y Permutación sólo pueden aplicarse en el antecedente, y Atenuación en el consecuente sólo puede aplicarse a un consecuente vacío. Los esquemas operatorios se ven modificados en el mismo sentido de lo expresado por la condición del consecuente.

La Condición del Consecuente parece ser a primera vista un recurso sencillo que permite un reconocimiento simplemente visual para distinguir los teoremas de la Lógica Intuicionista de los de la Lógica Clásica. Bastaría con explorar cada uno de los pasos de una derivación dada para descubrir si se viola o no la Condición del Consecuente, es decir si la derivación es o no intuicionista. Sin embargo, el recurso no es tan sencillo ni es tan visual.

En lo que sigue consignaremos algunas reflexiones acerca de los problemas que hemos abordado el año pasado en un Seminario dictado por la Dra. Palau al abordar el Cálculo de Secuentes de Gentzen. Básicamente intentaremos responder a dos cuestiones:

(1) Cuál es el estatuto de la condición del consecuente.

(2) Por qué funciona.

Respecto de (1) intentaremos determinar si esta condición permite caracterizar el concepto de teorema intuicionista o si se trata de un criterio que determina al conjunto de los teoremas intuicionistas.

1.- El estatuto de la condición del consecuente

Lo que nos interesa determinar en este punto es la medida en que la condición del consecuente logra capturar la idea básica de que en la Lógica Intuicionista no se sigue como teorema el Principio del Tercero Excluido ni ninguna fórmula que se derive del mismo, o, dicho de otro modo, que el Principio del Tercero Excluido no es válido en la Lógica Intuicionista. Las reglas de la Lógica de Secuentes difieren de las del cálculo de deducción natural en que mientras que las segundas definen las relaciones entre fórmulas, las primeras representan afirmaciones de consecuencia lógica expresadas en términos de pruebas. De manera que para caracterizar a la Lógica Intuicionista en términos de pruebas formales hay que forjar algún tipo de vínculo entre la no validez del Principio del Tercero Excluido y las condiciones que se imponen en las pruebas formales del Cálculo de Secuentes para la Lógica Intuicionista. Gentzen introduce específicamente para el Cálculo de Secuentes de la Lógica Intuicionista la restricción expresada por Condición del Consecuente.

1.1.- La Condición del Consecuente como caracterización del concepto de teorema intuicionista

Si la condición, de carácter sintáctico que Gentzen impone a los teoremas intuicionistas caracteriza el concepto de teorema intuicionista, debería formularse como sigue:

Def.1: Un teorema es intuicionista si y sólo si tiene por lo menos una derivación que no viole la condición del consecuente.

Ahora bien, en tanto que definición, no nos informa mucho acerca de lo que significa conceptualmente la Lógica Intuicionista. La idea básica es que la Condición del Consecuente bloquee toda derivación posible del Principio del Tercero Excluido pero no de los demás teoremas intuicionistas. Sin embargo en la definición misma no se expresa una relación directa entre la restricción y la derivación del Principio del Tercero Excluido; de manera que la definición misma no informa explícitamente acerca del significado de la Lógica Intuicionista en términos de las pruebas. La definición 1 no da cuenta de la idea básica de que para la Lógica Intuicionista no es válido que para toda fórmula p o bien *hay una prueba de p* o bien *p lleva a contradicción*. No da cuenta de las razones por las cuales los intuicionistas no admitieron ciertas fórmulas como teoremas, es decir, no queda en evidencia la cuestión de la validez del Principio del Tercero Excluido. O sea, lleva al problema general de si la sintaxis refleja la semántica.

De manera que, tal vez sea más apropiado considerar que la Condición del Consecuente no caracteriza conceptualmente a la Lógica Intuicionista sino que se trata de un criterio que permite identificar sintácticamente a la Lógica Intuicionista, es decir al conjunto de sus teoremas.

1.2.- La condición del consecuente como criterio sintáctico

El Cálculo de Secuentes, al igual que el Cálculo de la Deducción Natural de Gentzen, no es un método algorítmico que permita decidir si una fórmula cualquiera dada es o no un teorema intuicionista. Por ello, para que la Condición del Consecuente pueda funcionar como criterio de identificación de los teoremas intuicionistas debe encontrarse la derivación que cumpla con la Condición del Consecuente o debe probarse que dicha derivación no existe.

Por ejemplo, la fórmula ñ ØA ® (A ® B) admite una derivación en el Calculo de Secuentes que viola la Condición del Consecuente porque debe aplicarse Atenuación en el consecuente no vacío. Pero también admite otra derivación que no viola la Condición del Consecuente. De manera que el hecho de que exista una derivación que viole la condición del Consecuente no implica que no haya otra derivación que cumpla con la misma. Es decir, el haber producido una derivación que viole CC no significa que éste sea un teorema no intuicionista, ya que el criterio nos dice que para que no sea un teorema intuicionista debe violarse la condición del consecuente en toda derivación, es decir no debe haber ninguna derivación en la que todas sus secuencias contengan una sola fórmula en el consecuente. En el caso particular que ejemplificamos, dado que existe una derivación que no viola la Condición del Consecuente, el teorema en cuestión es intuicionista. No obstante, nada garantiza que podamos encontrarla en un tiempo finito. De manera que su potencia en tanto que criterio efectivo para demarcar los teoremas intuicionistas de los clásicos se ve seriamente afectada, en el sentido de que el criterio no es tan visual como parecía.

Siendo así, en las condiciones concretas de su aplicación, lo que el criterio nos permite es identificar a los teoremas intuicionistas una vez producida una derivación en la que no se viole la Condición del Consecuente y sin necesidad de modificar las reglas operatorias, que siguen siendo las mismas tanto para la Lógica intuicionista como para la Clásica.

2.- ¿Por qué la Condición del Consecuente es apropiada?

En lo que sigue consideraremos que la condición es apropiada exclusivamente en el sentido determinado en (1), es decir como criterio para identificar los teoremas intuicionistas en caso de que se haya logrado producir la derivación que cumpla con la Condición del Consecuente.

Según Gentzen, la Condición del Consecuente que introduce en el Cálculo de Secuentes tiene el mismo efecto que el de impedir el empleo del Principio del Tercero Excluido (o de cualquier principio que lo requiera en su derivación) en el Cálculo de Deducción Natural.

Al definir el concepto de "secuencia", Gentzen sostiene que la secuencia:

$U_1, ..., U_m$ ñ $B_1, ..., B_n$

tiene el mismo significado intuitivo que la conjunción de todas las fórmulas del antecedente y la disyunción de todas las fórmulas del consecuente del condicional material correspondiente:

U_1 T...T U_m ® B_1 U...U B_n

De manera que partiendo de la secuencia fundamental:

(1) A ñ A

se puede obtener por Introducción de la Ø en el consecuente:

(2) ñ A, ØA

cuyo antecedente es vacío y que puede entenderse intuitivamente como:

(3) Æ ® A U ØA

Es decir, que el conjunto vacío implica al Principio del Tercero Excluido.

Pero, la fórmula 2 no cumple con la Condición del Consecuente, de manera que una lectura intuitiva de una secuencia que pudiera interpretarse como el Principio del Tercero Excluido involucra dejar caer la Condición del Consecuente.

La derivación del Principio del Tercero Excluido en el Cálculo de Secuentes muestra que es necesario violar la Condición del Consecuente para poder vaciar el antecedente de la secuencia, es decir, en algún paso hay que introducir la negación en un consecuente no vacío. (1)

A su vez esa derivación demuestra que una derivación cualquiera del cálculo de secuentes en la que la Condición del Consecuente no se cumpla, permite automáticamente derivar el Principio del Tercero Excluido en tanto que teorema. Dicho en términos generales, si no se cumple la condición entonces se deriva el Principio del Tercero Excluido.

Y si es posible derivar el Principio del Tercero Excluido, será posible derivar todo teorema no intuicionista. Por ello, la Condición del Consecuente no debe entenderse en el sentido de que es suficiente con que haya una derivación que no cumpla con la condición para que un teorema sea no intuicionista sino a la inversa, *es suficiente con que haya una derivación que cumpla con la condición para que un teorema sea intuicionista*. Precisamente esa derivación es la que prueba que el Principio del Tercero Excluido no se requiere para derivar el teorema en cuestión

En síntesis, es suficiente con violar la Condición del Consecuente para que se derive el Principio del Tercero Excluido, pero esto a su vez no es suficiente para determinar que un teorema es no intuicionista. Para que un teorema sea no intuicionista debe ser necesario violar la Condición del Consecuente en forma generalizada, es decir no debe haber ninguna derivación del teorema en cuestión que no viole la condición.

A la inversa, para que un teorema sea intuicionista es suficiente con mostrar que hay una derivación que cumpla con la Condición del Consecuente. Esto significa que si se cumple la condición, el Principio del Tercero Excluido no se puede derivar, y por ende, no puede estar involucrado en la derivación del teorema que parta sólo de secuencias fundamentales.

La cuestión es ¿cómo demostramos que es imposible derivar el Principio del Tercero Excluido sin violar la condición del consecuente?

Tal vez resulte más claro plantearlo como un problema de estrategia y en forma positiva, es decir, tratar de hacerlo. Supondremos pues que hay una derivación en el Cálculo de Secuentes que cumple con la Condición del Consecuente y con las Reglas de Gentzen y que permite derivar el Principio del Tercero Excluido. Dado que se trata de la derivación de un teorema, sólo se puede partir de secuencias fundamentales.

Adviértase que la derivación de la fórmula A U ØA es enteramente sencilla:

A ñ A secuencia fundamental

A ñ A U ØA (ñU)

De manera que el problema no reside en la derivación de la fórmula sino en su teoremicidad. Para que la fórmula sea teorema, el antecedente de la secuencia debe ser Æ. Pero, si se parte de secuencias fundamentales hay sólo una manera de lograrlo: vaciando el antecedente de la o las secuencias fundamentales iniciales. Dado que Gentzen planteo su Cálculo de Secuentes teniendo al constructivismo en mente, las reglas propuestas permiten construir derivaciones en las que nada se pierde, toda fórmula inicial aparecerá en la secuencia final. La única excepción es el caso de la Regla de Corte que es la única que permite genuinamente eliminar fórmulas. Gentzen dedica gran parte de su tratado a demostrar que todo lo que se puede derivar con Corte, también se puede derivar sin Corte, es decir, la regla es útil pero prescindible. De manera que tomaremos la indicación de Gentzen y no emplearemos Corte en la derivación que buscamos.

Por otro lado, la fórmula buscada A U ØA , se obtiene en el consecuente a partir de uno de los dos disyuntivos (cualquiera de ellos sirve). Además como la fórmula no está negada, no se la puede obtener vaciando el antecedente por Introducción de la Negación. De manera que sólo es posible obtener A U ØA en el consecuente derivándola de una secuencia cualquiera que tenga a A o a ØA en el consecuente.

Como hemos supuesto que no violamos la Condición del Consecuente la fórmula previa a la derivación de A U ØA debe tener una sola fórmula en el consecuente: o bien A o bien ØA , pero no ambas. Es decir podría darse cualquiera de los dos casos siguientes:

(n) A ñ A secuencia fundamental

(n+1) A ñ A U ØA (ñU)

ó

(n) ØA ñ ØA secuencia fundamental

(n+1) ØA ñ A U ØA (ñU)

De manera que sólo nos resta un problema por resolver: cómo deshacernos del antecedente de la secuencia n+1. Para ello tendremos que emplear reglas operatorias porque las reglas estructurales no nos sirven debido a que Contracción en el antecedente sólo permite eliminar una de las fórmulas de un par de fórmulas idénticas pero no reducir una fórmula al conjunto vacío.

De las reglas operatorias solamente Introducción de la Negación e Introducción del Condicional (ambas en el consecuente) permiten pasar una fórmula del antecedente al consecuente para vaciarlo. Pero tampoco nos sirven. Si aplicamos Introducción del Condicional se genera una fórmula condicional y por ello nos desvía de la fórmula buscada:

(n+2) ñ A ® (A U ØA) (ñ®)

ó

(n+2) ñ ØA ® (A U ØA) (ñ®)

Por otro lado, Introducción de la negación en el consecuente no sólo nos desvía de la fórmula buscada sino que nos lleva a violar la Condición del Consecuente pues obtendríamos:

(n+2) ñ A U ØA, ØA (ñØ)

ó

(n+2) ñ A U ØA, ØØA (ñØ)

La única forma de evitar esto consistiría en no partir de secuencias fundamentales del tipo A ñ A. Pero en este caso estaríamos violando las normas que regulan las derivaciones mismas, independientemente de que sean intuicionistas o no intuicionistas, por lo que no puede llevarse a cabo la construcción de la derivación.

De manera que son los principios mismos de prueba fijados por Gentzen los que han sido establecidos de manera tal que la Condición del Consecuente funcione. Siendo así podemos afirmar que en el Cálculo de Secuentes de Gentzen es imposible derivar el Principio del Tercero Excluido partiendo de secuencias fundamentales y sin violar la Condición del Consecuente.

Ahora podemos responder a la segunda cuestión, aunque en forma limitada, admitiendo que no es por casualidad que precisamente sea la condición estipulada por Gentzen la que funcione de manera apropiada para identificar a los teoremas intuicionistas. Lo que se debía buscar era una condición que impidiera la derivación del Principio del Tercero Excluido y con ello filtrara la derivación de los teoremas no intuicionistas. La condición del consecuente funciona precisamente porque para obtener el Principio del Tercero Excluido como teorema es indispensable Introducir la Negación en el consecuente no vacío de alguna de las secuencias de la derivación (como se aprecia en la derivación del PTE que presentamos). Al bloquear este movimiento mediante CC se limita la aplicación de las restantes reglas restándoles la potencia necesaria para derivar el Principio del Tercero Excluido y todo lo que se derive del mismo. Es decir, la Condición del Consecuente trae aparejado el que se quiten dos reglas estructurales: Permutación y Contracción en el consecuente., lo cual hace del intuicionismo una lógica subestructural.

Por otro lado y a manera de comentario final, señalamos que la condición es útil para demostrar, en forma intuicionista la dependencia de otros principios del Principio del Tercero Excluido. Por ejemplo Doble Negación no es derivable si se acepta la Condición del Consecuente, pero es posible derivar en forma intuicionista Doble Negación a partir de Principio del Tercero Excluido de manera que se demuestra por qué los intuicionistas tampoco admitían el principio de Doble Negación.

Conclusiones

(a) la Condición del Consecuente no permite caracterizar el concepto de teorema intuicionista

(b) la aplicación de la Condición del Consecuente es un criterio que determina al conjunto de los teoremas intuicionistas.

(c) La razón de que la condición del consecuente funcione reside en la forma particular en que está regimentado el Cálculo de Secuentes, es decir en los principios que regulan la construcción de las derivaciones y en las Reglas formuladas por Gentzen. Para ello baste ilustrarlo diciendo que bien podría Gentzen haber incluido la condición del consecuente como principio regulativo de la construcción de todas las secuencias (no sólo de aquellas que formen parte de las derivaciones intuicionistas) e introducir una condición del consecuente simétrica para la lógica clásica: que en toda derivación de un teorema clásico se respete la condición según la cual el consecuente de alguna de las secuencias de la derivación de un teorema exclusivamente clásico tenga más de una fórmula.

NOTAS

(1) Para mostrarlo de manera más clara consignamos la derivación, en el Cálculo de Secuentes, del Principio del Tercero Excluido, en la que se advierte que se deja caer la Condición del Consecuente:

A ñ A	secuencia fundamental
ñ A, ØA	(ñØ)
ñ A, A U ØA	(Uñ)
ñ A U ØA, A U ØA	(Uñ)
ñ A U ØA	(ñContr.)

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- GENTZEN, Gerhard (1934), 1955, *Recherches sur la déduction logique*, Paris, Presses Universitaires de France.

- Van DALEN, Dirk, ``Intuitionistic Logic'', en *Handbook of Philosophical Logic*, vol.V

- WALLEN, Lincoln, ``Tableaux for Intuitionistic Logics'', en M. D'AGOSTINO, D.M.GABBAY, R. HÄHNLE, J. POSEGGA, *Handbook of Tableaux of Methods*, cap.5